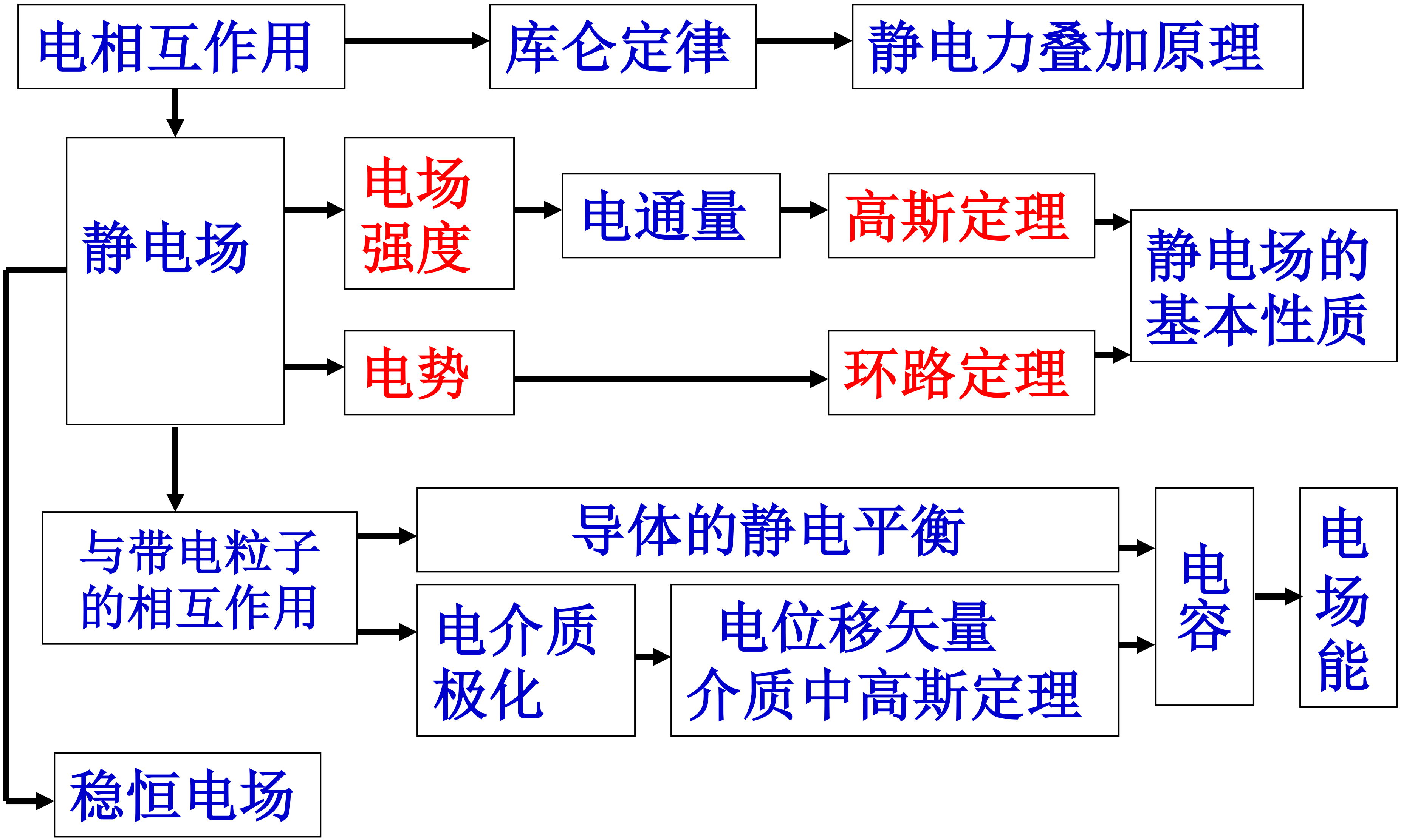
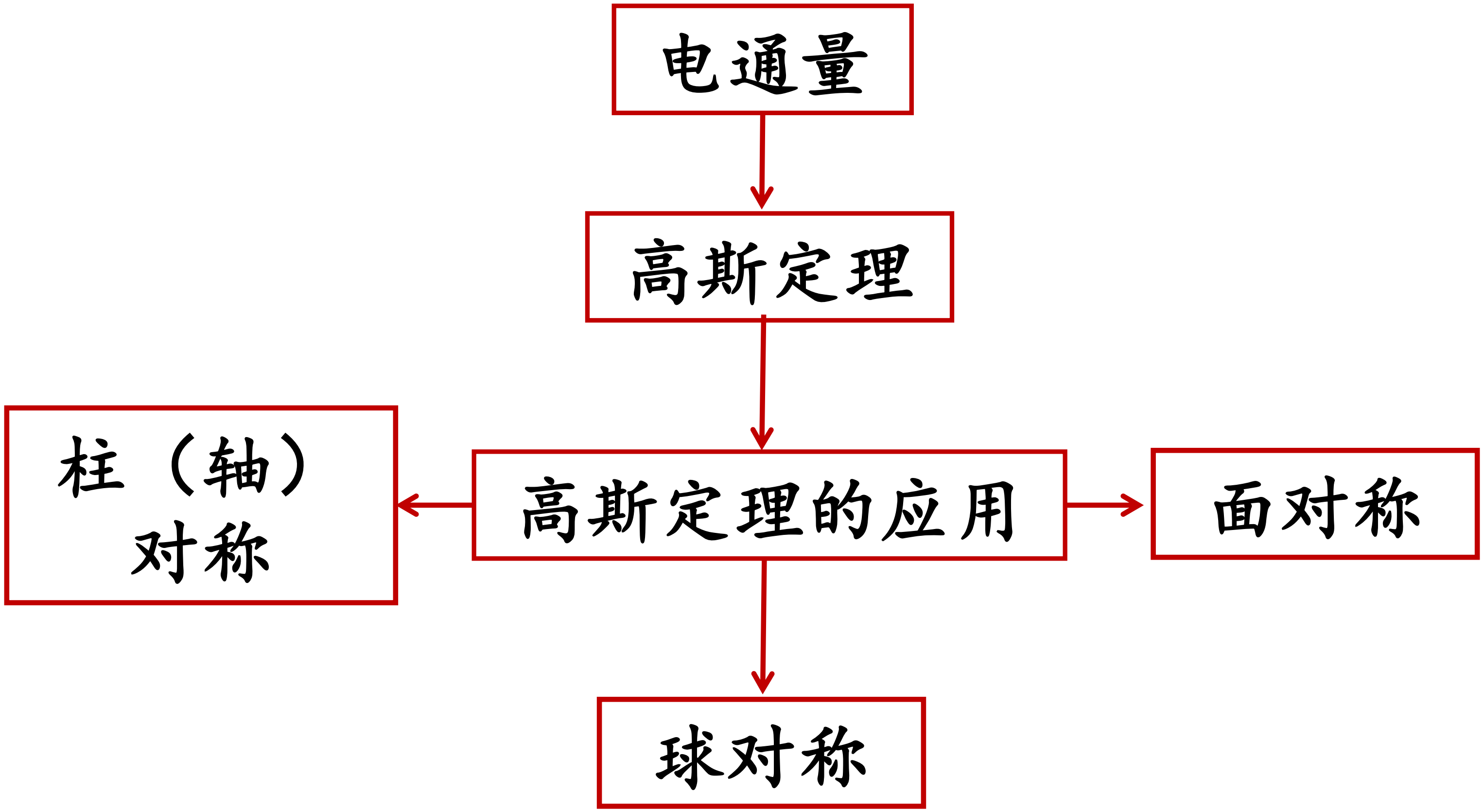
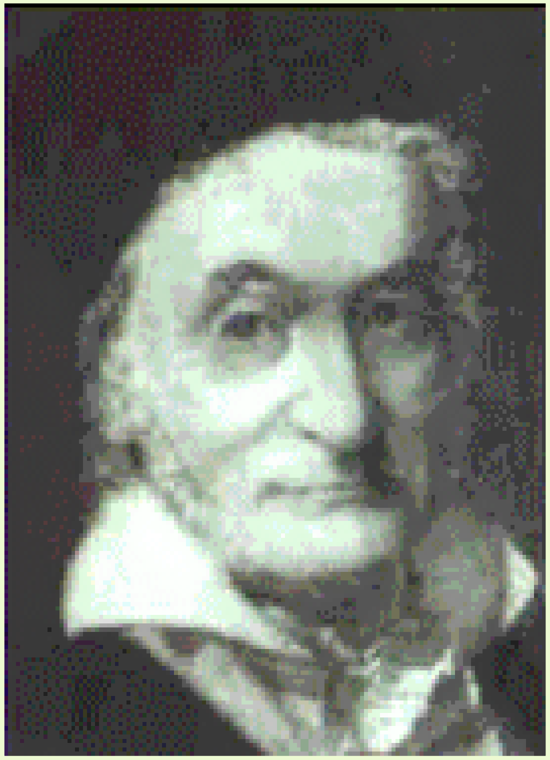
第12章　静电场


电相互作用
库仑定律
静电力叠加原理
静电场
电场强度
电通量
高斯定理
静电场的基本性质
电势
环路定理
与带电粒子的相互作用
导体的静电平衡
电介质极化
电位移矢量
介质中高斯定理
电容
电场能
稳恒电场

12-3 高斯定理



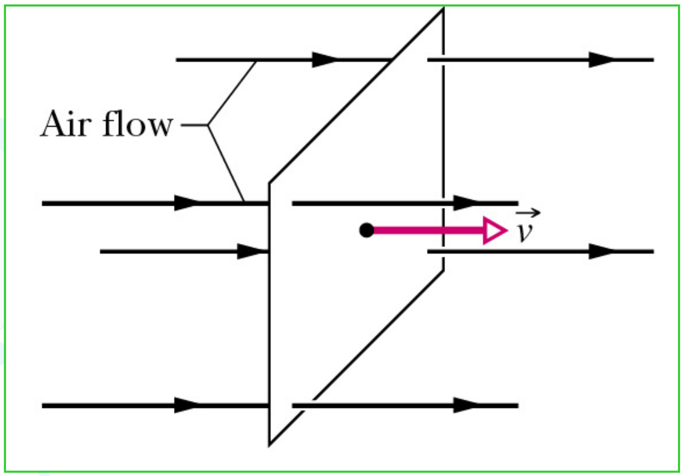


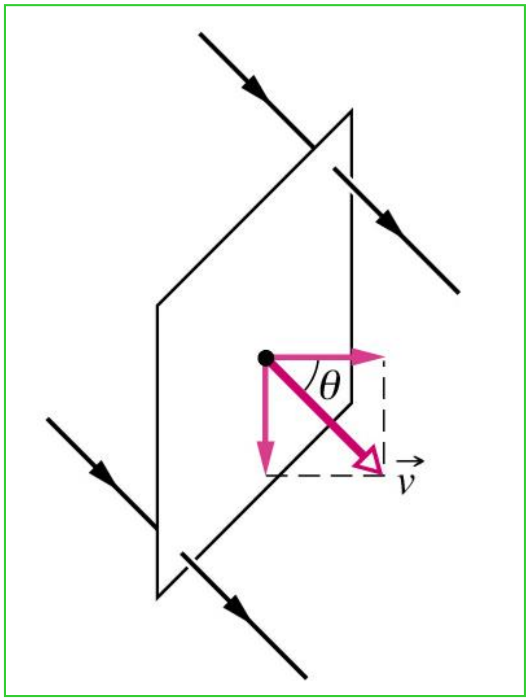
高 斯
（Carl Friedrich Gauss)
1777—1855

- 德国数学家、物理学家和天文学家。
- 长期从事于数学并将数学应用于物理学、天文学和大地测量学等领域的研究，著述丰富，成就甚多。
- 他一生中共发表323篇（种）著作，提出404项科学创见。

一、矢量场的通量(P17–18)

体积流量： $\Phi=(v\cos\theta)A=\vec{v}\cdot\vec{A}$



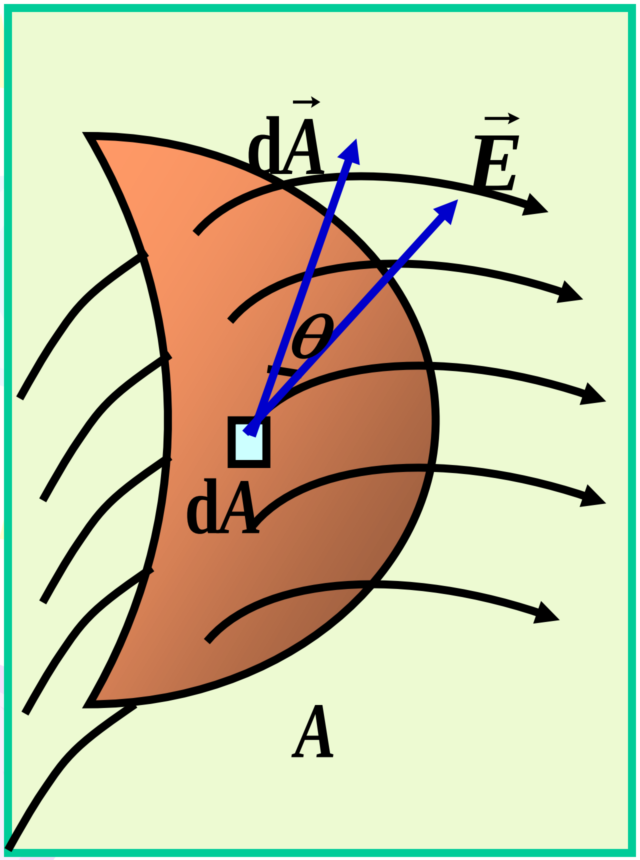


任意矢量场， $\Phi=\vec{E}\cdot\vec{A}$

矢量通量：表示面积与穿过该面积的场的矢量乘积。

二、电场通量

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{A} \ ?$$



微元分析法：

以平代曲，以不变代变

面积元矢量： $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}A\,\vec{n}$

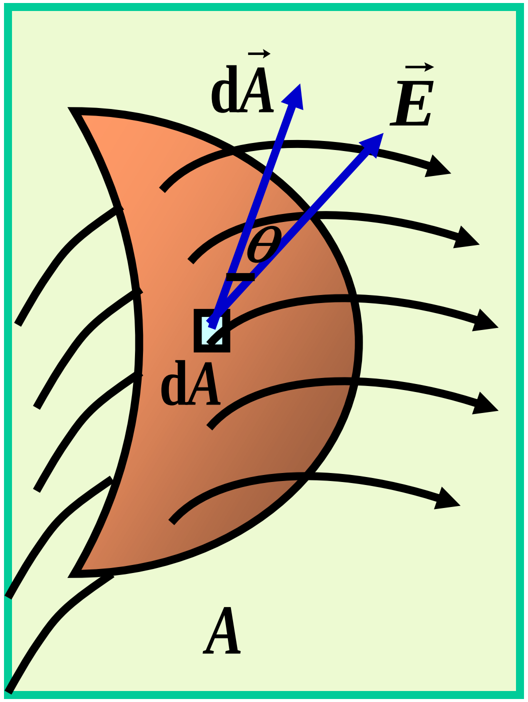
面积元范围内 $\vec{E}$ 视为均匀

1）通过面元的电通量：

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E\mathrm{d}A\cos\theta$$

因此，对于非均匀电场中任意微元面积dA上的电通量：

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$



穿过任意面积A的总通量：

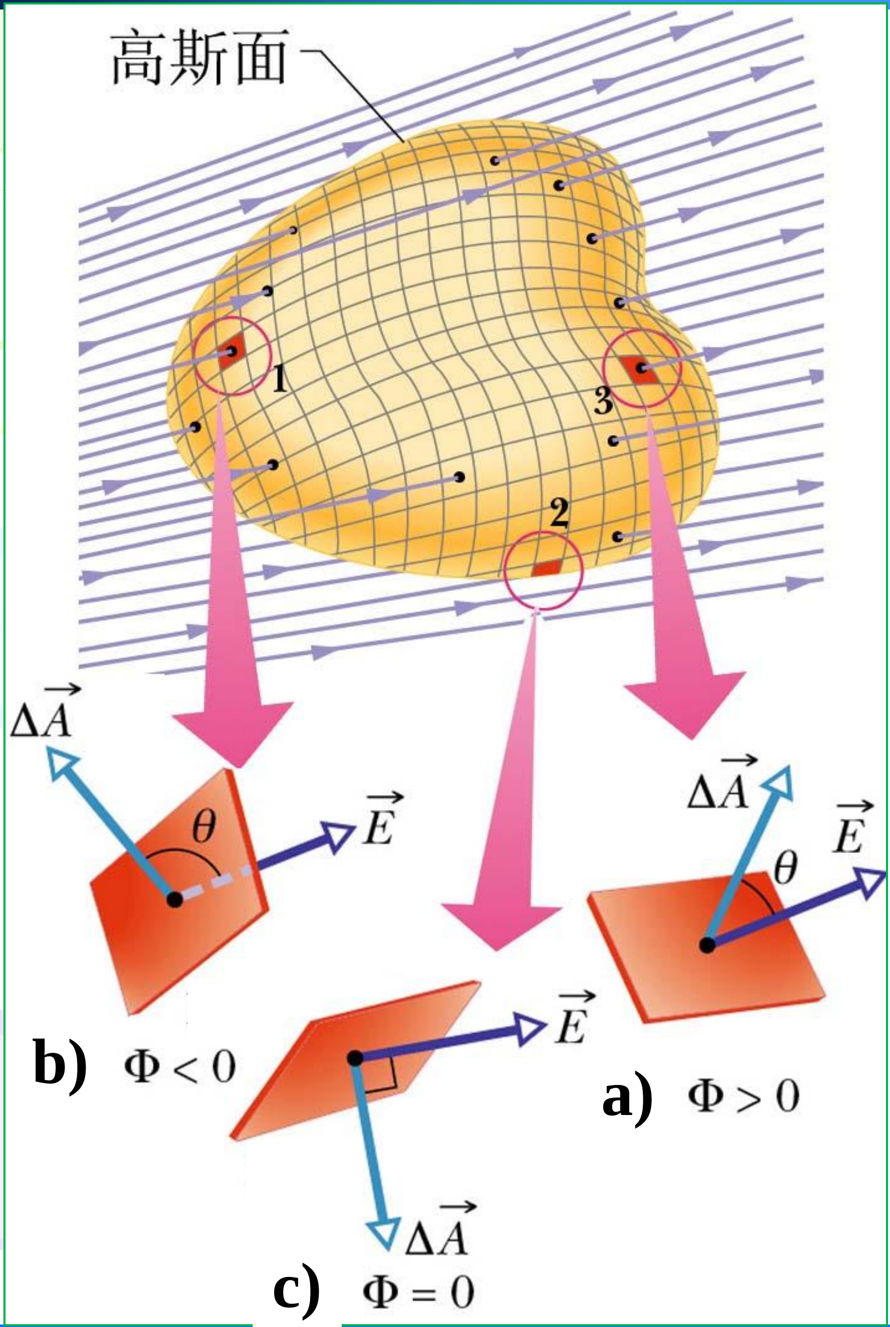
（面积分）

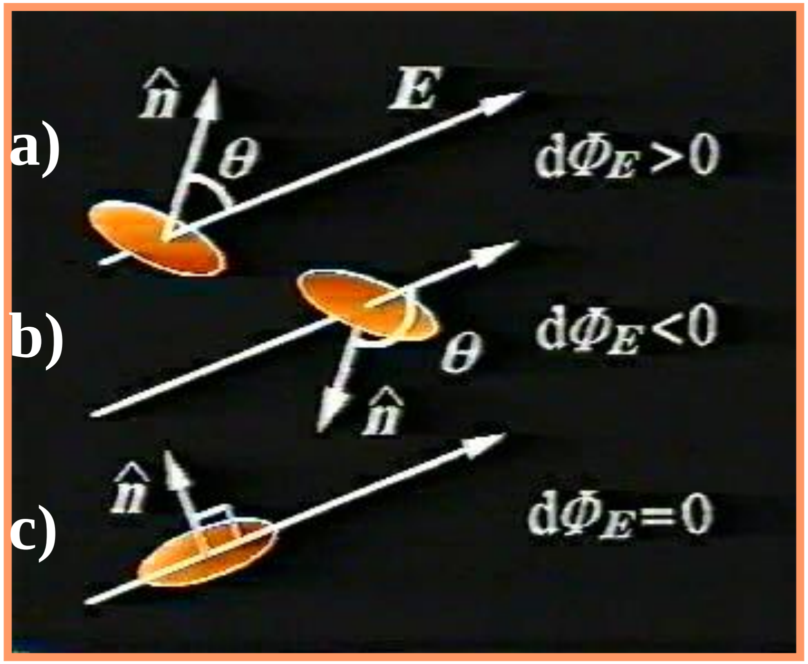
$$\Phi_e = \int \mathrm{d}\Phi_e = \int_A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

穿过封闭面A的电通量：

（封闭曲面积分）

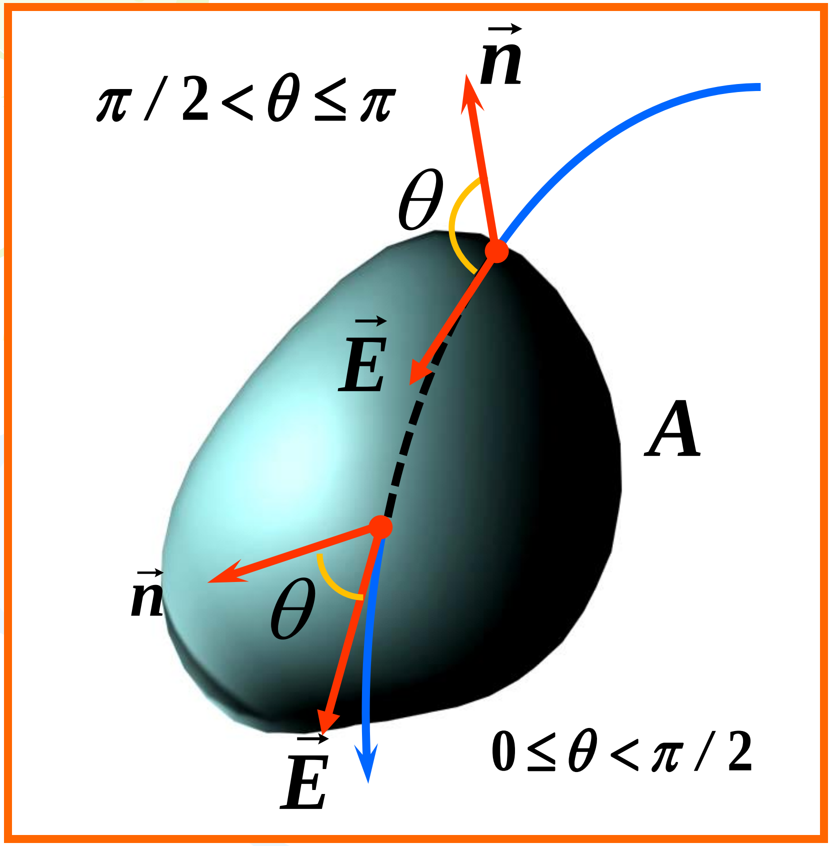
$$\Phi_e = \oint_A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$





$$\begin{cases} \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ \theta > \dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

西南交通大学 Southwest Jiaotong University



通过封闭曲面的电通量:

$$\Phi_e=\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

规定：封闭曲面外法向为正

穿入的电场线 $\Phi_e<0$

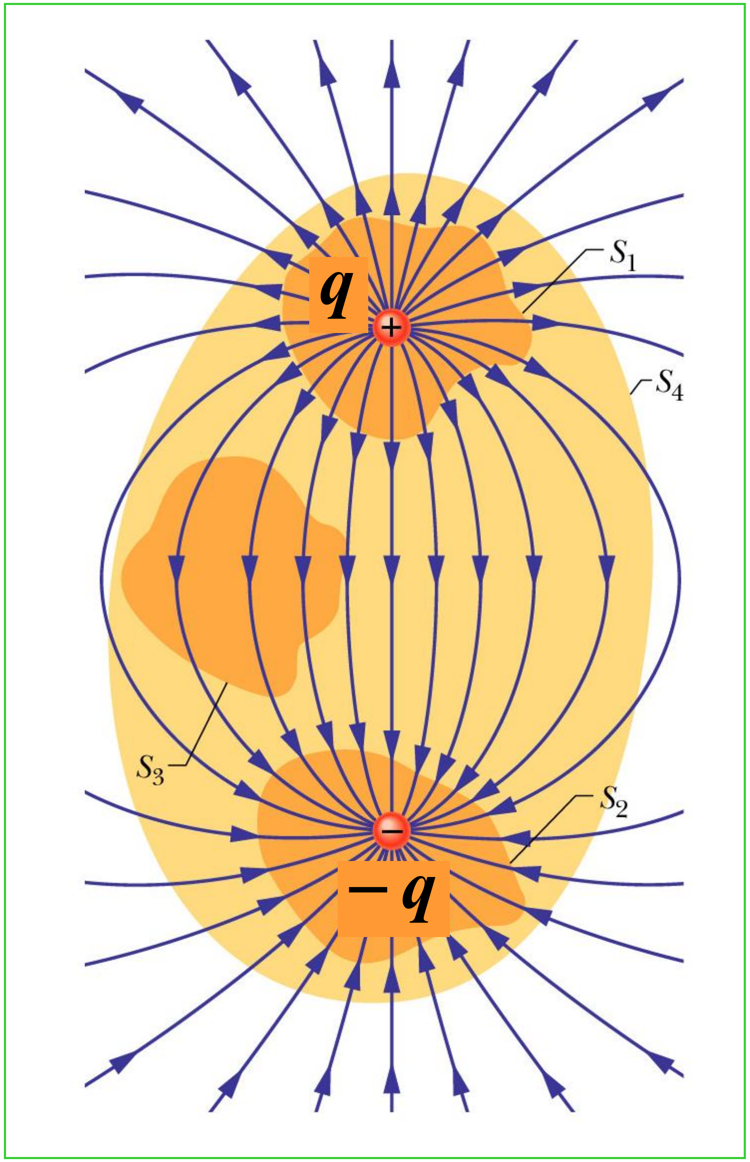
穿出的电场线 $\Phi_e>0$

三、高斯定理

高斯定理涉及穿过一闭合面（高斯面）电通量与该面所包围的净电荷的关系：

$$\Phi_e=\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{i内}$$

真空中，通过电场中任意封闭曲面的电通量等于曲面内包围的电荷的代数和除以真空电容率



库仑定律 $\xrightarrow{\text{等价}}$ 高斯定理

➢ 由高斯定理导出库仑定律：

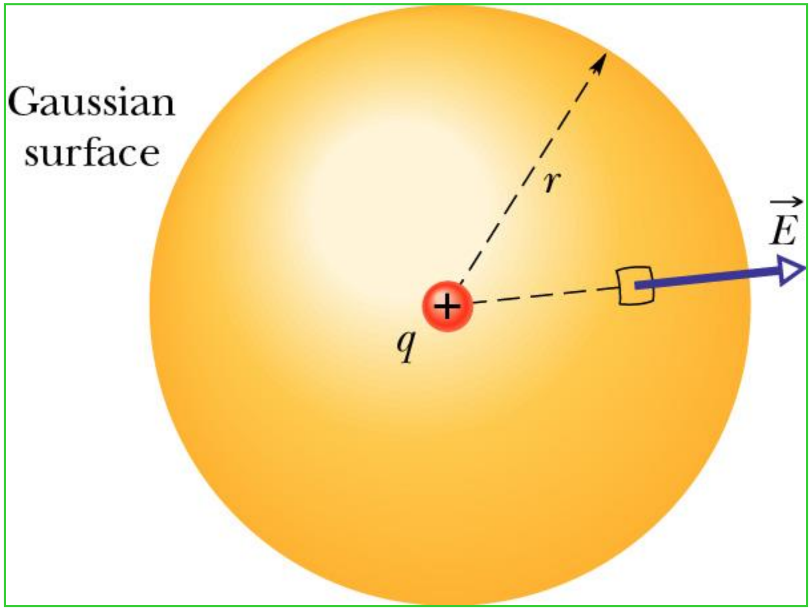
对称性：点电荷q，球对称。

$$\sum q_{内} = q = \varepsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \varepsilon_0 \oint_A E\mathrm{d}A$$

$$= \varepsilon_0 E \oint_A \mathrm{d}A = \varepsilon_0 E \, 4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$F = q_0 E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 q}{r^2}$$



➤ **关于高斯定理的讨论：**

$$\boxed{\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}}$$

1. 式中各项的含义

A： 高斯面——封闭曲面

$\vec{E}$： 所有电荷在 A 上某点产生的总的电场强度（A 内外所有电荷均有贡献）

ε_0： 真空电容率

$\sum q_{内}$： A 内的净电荷

Φ_e： 通过 A 的电通量（只有 A 内的电荷有贡献）

- 关于高斯定理的讨论：

$$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

2. 揭示了静电场中“场”和“源”的关系

电场线有头有尾

$+q$：发出 q/ε_0 条电场线，是电场线的“头”

$-q$：吸收 q/ε_0 条电场线，是电场线的“尾”

“头”、“尾” ⟹ “源”

静电场的重要性质 —— 静电场是有源场

➢ 利用高斯定理可方便求解具有某些对称分布的静电场：

掌握

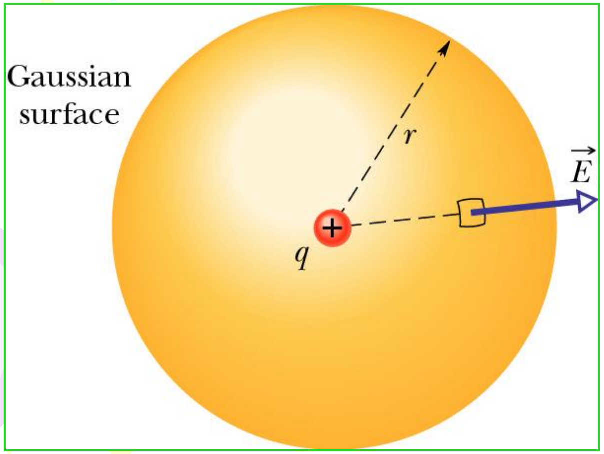
成立条件：静电场

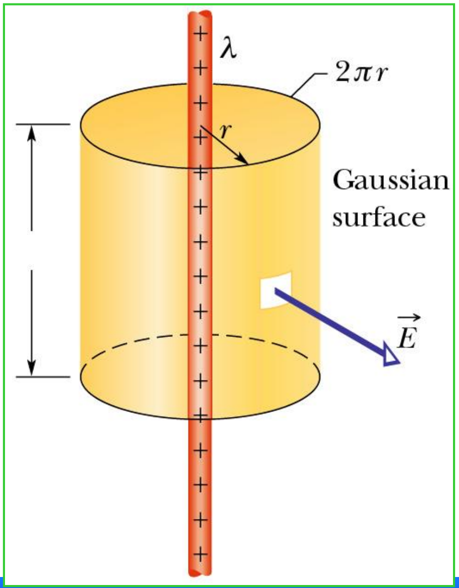
求解条件：电荷分布具有某些对称性，从而使其电场分布具有某些对称性，

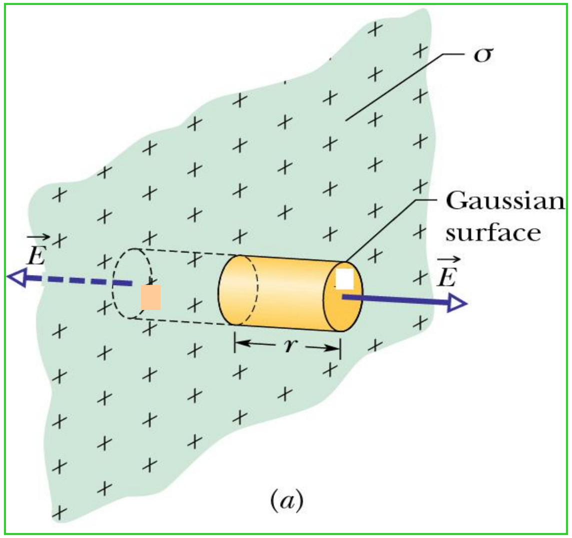
这样才能找到恰当的高斯面，使积分式 $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ 中的 $\vec{E}$ 能够以标量形式移到积分号外，从而简便地求出 $\vec{E}$ 分布

常见类型：场源电荷分布 $\begin{cases} \text{球对称性} \\ \text{轴对称性} \\ \text{面对称性} \end{cases}$

对称性	电场特征	高斯面选取
球面	$\vec{E}=E(r)\hat{r}$	同心球面
柱面	$\vec{E}=E(r)\hat{r}$	同轴柱(侧+两底)
平面	$\vec{E}=E(x)\vec{i}$	平行底面桶(两底+侧)

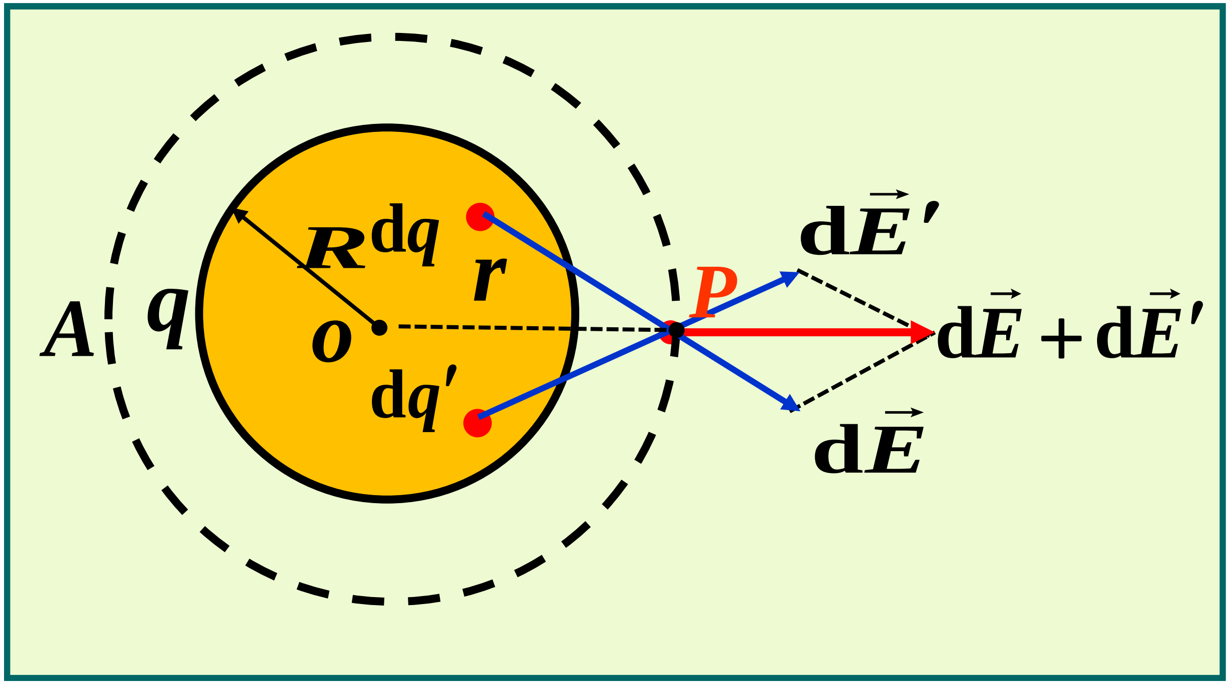






[例一] 求均匀带电球体（q、R ）的电场分布

对称性分析



以O 为中心，r 为半径的球面 A 上各点彼此等价

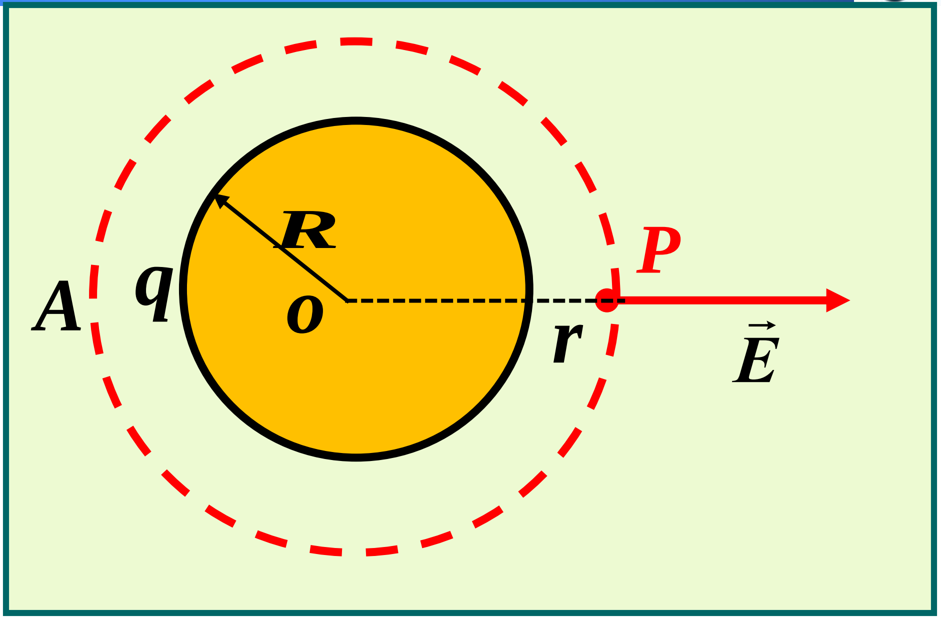
$\vec{E}$ 大小相等

$\vec{E}$ 方向沿径向

均匀带电球体的电场分布具有球对称性

确定高斯面

以半径 r 的同心球面A为高斯面

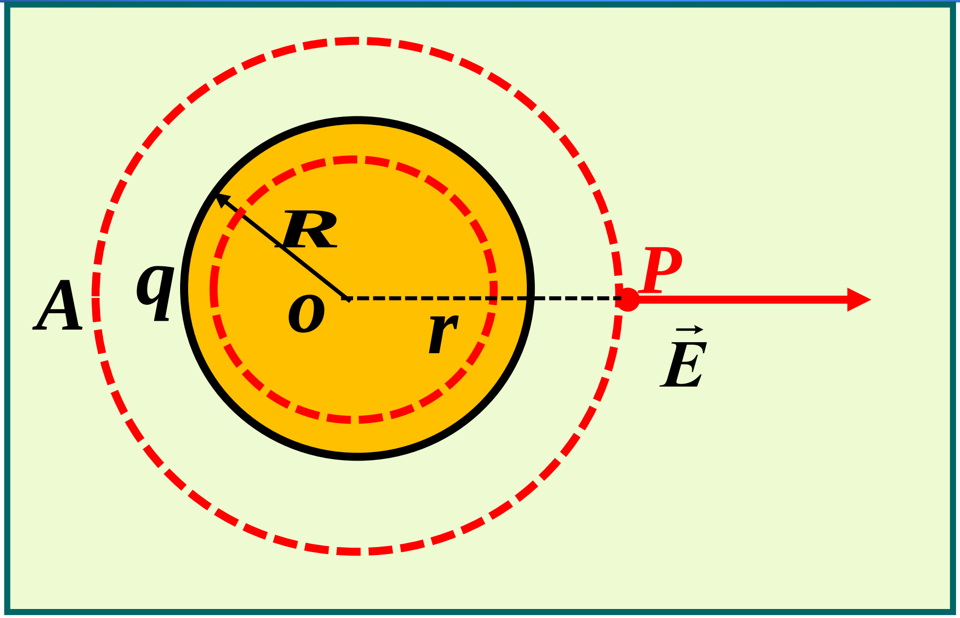


通过A的电通量：$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \oint_s E\cos 0^\circ dA = E\cdot 4\pi r^2$

由高斯定理：$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$$\Rightarrow \quad E = \left(\sum q_{内}\right)\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$

西南交通大学 Southwest Jiaotong University



$$E = \left(\sum q_{内}\right) \Big/ \left(4\pi\varepsilon_0 r^2\right)$$

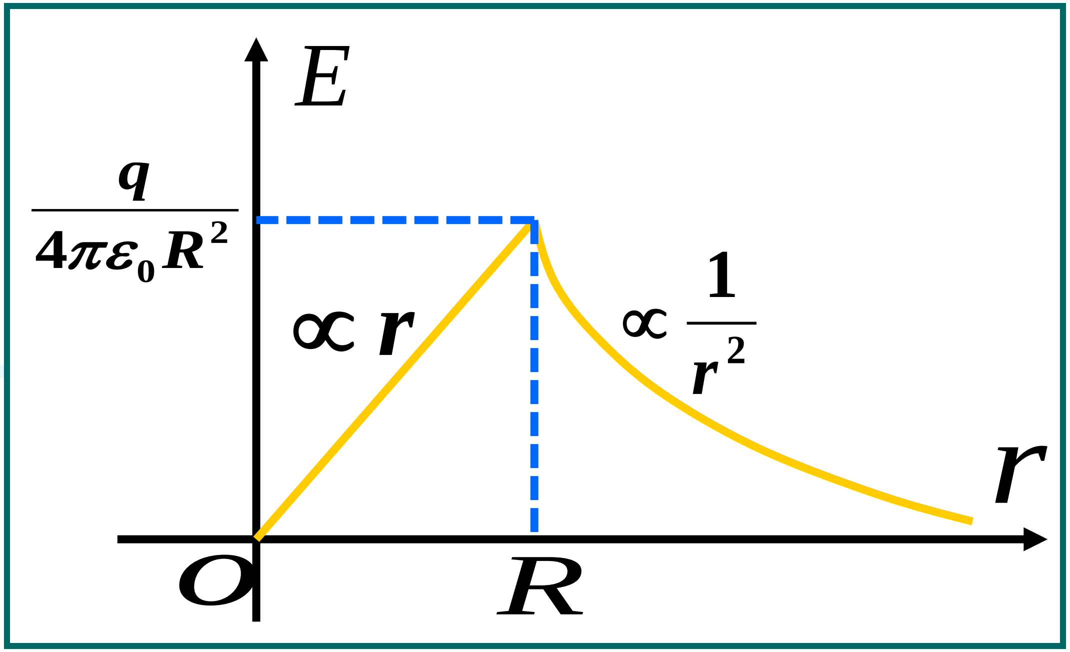
$$r \geq R: \quad \sum q_{内} = q \qquad \Rightarrow E_{外} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r \leq R: \quad \sum q_{内} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad E_{内} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r\ge R)\end{cases}$$

$(r\le R)$ → 球体内区域 $E\propto r$

$(r\ge R)$ → 球体外区域 ～ 电量集中于球心的点电荷



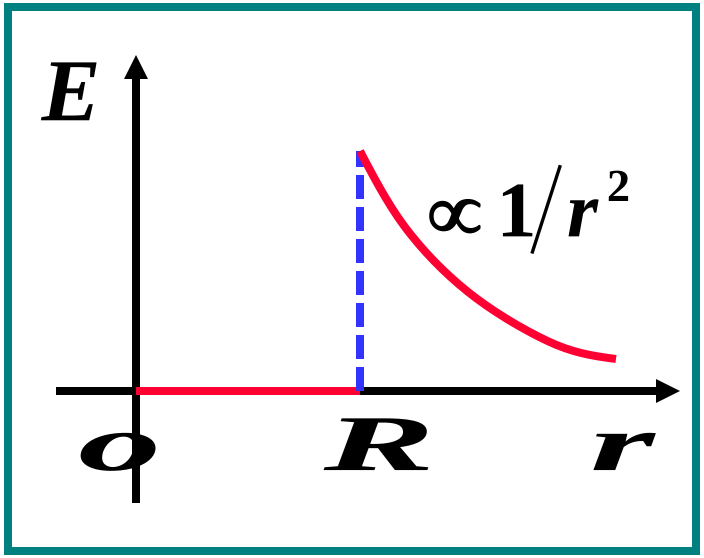
西南交通大学 Southwest Jiaotong University

练习1：

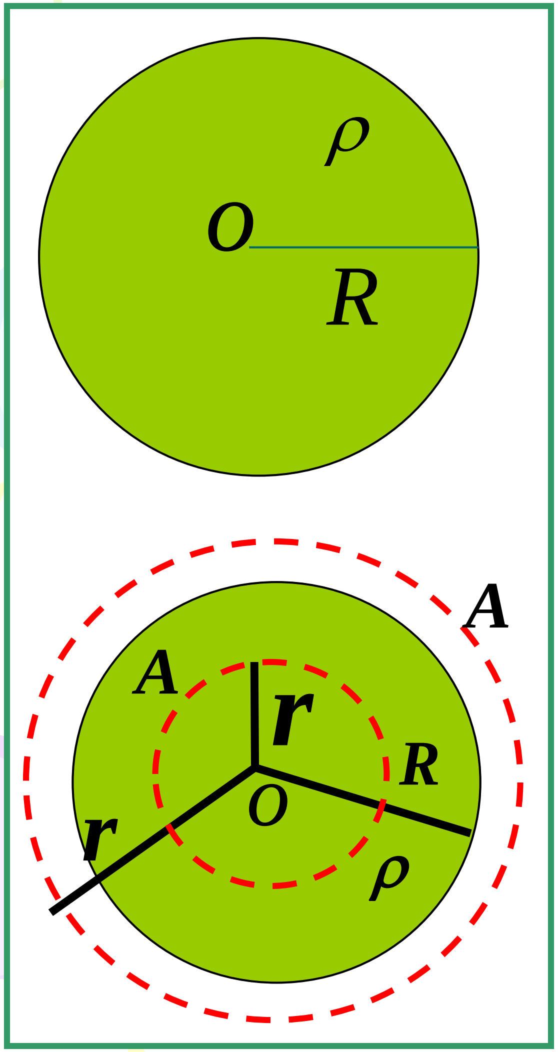
1. 求均匀带电球面（R, q）的电场分布，并画出 $E \sim r$ 曲线。

高斯面：半径 r 的同心球面

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & (r < R) \\ \dfrac{q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & (r > R) \end{cases}$$



练习2：求半径R，电荷体密度 $\rho = k/r$（k 为常数，$r \le R$ ）带电球体内外的场强。



思考：1）选用哪种方法求解更方便?

$\rho = k/r$ 未破坏电场分布的球对称性

用高斯定理求解方便

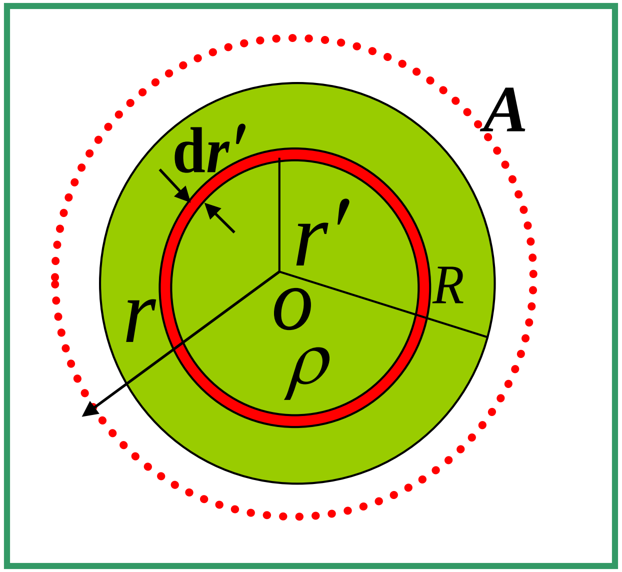
选高斯面 ⟶ $\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 求 $\vec{E}$

2）选高斯面？

同心球面 A (半径 r)

$$\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E \cdot 4\pi r^2$$

3) $\sum q_{内} = ?$



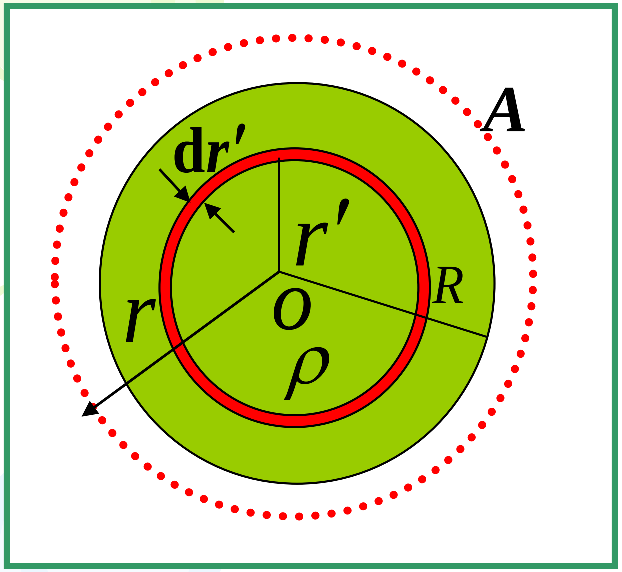
$$\sum q_{内} = \rho \cdot V = \frac{k}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$$ 对否？

✗ 电荷密度不是均匀分布

$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'$$

$$r > R: \quad \sum q_{内} = \int_0^R \rho \mathrm{d}V = \int_0^R \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k R^2$$

$$r < R: \quad \sum q_{内} = \int_0^r \rho \mathrm{d}V = \int_0^r \frac{k}{r'} \cdot 4\pi r'^2 \mathrm{d}r' = 2\pi k r^2$$



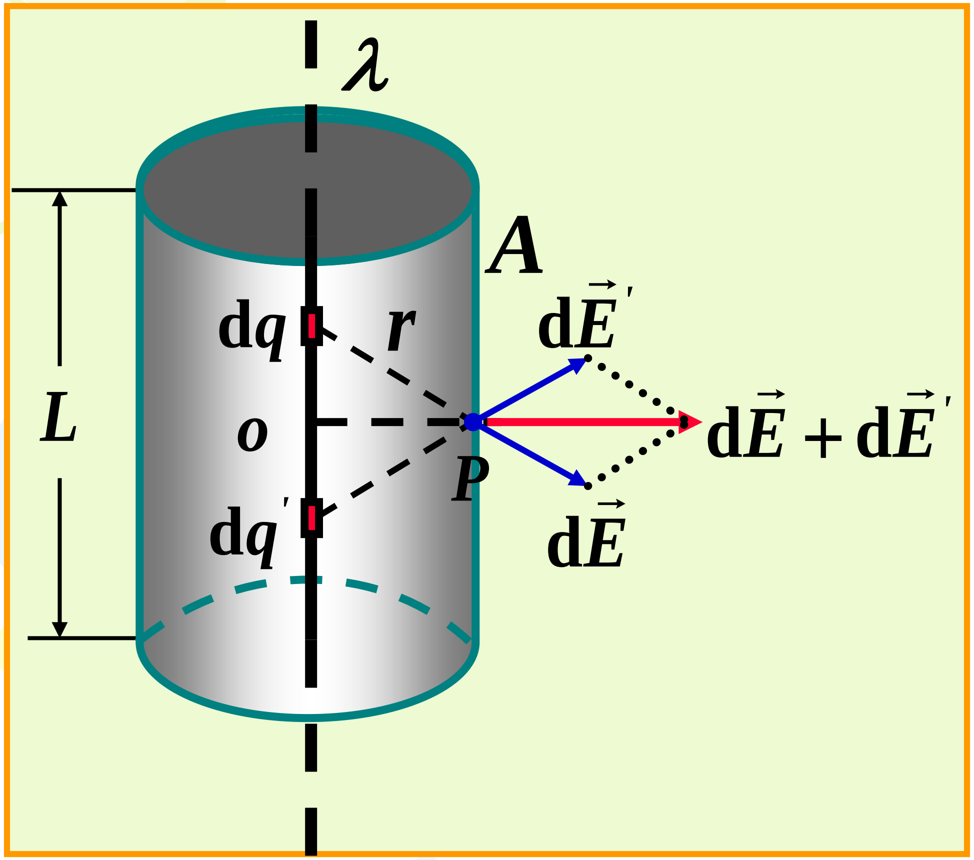
4） 电场强度的大小，方向？

由高斯定理：$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

得： $E_{内} = \dfrac{k}{2\varepsilon_0}; E_{外} = \dfrac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$ 沿径向

[例二] 无限长均匀带电直线（λ）的电场



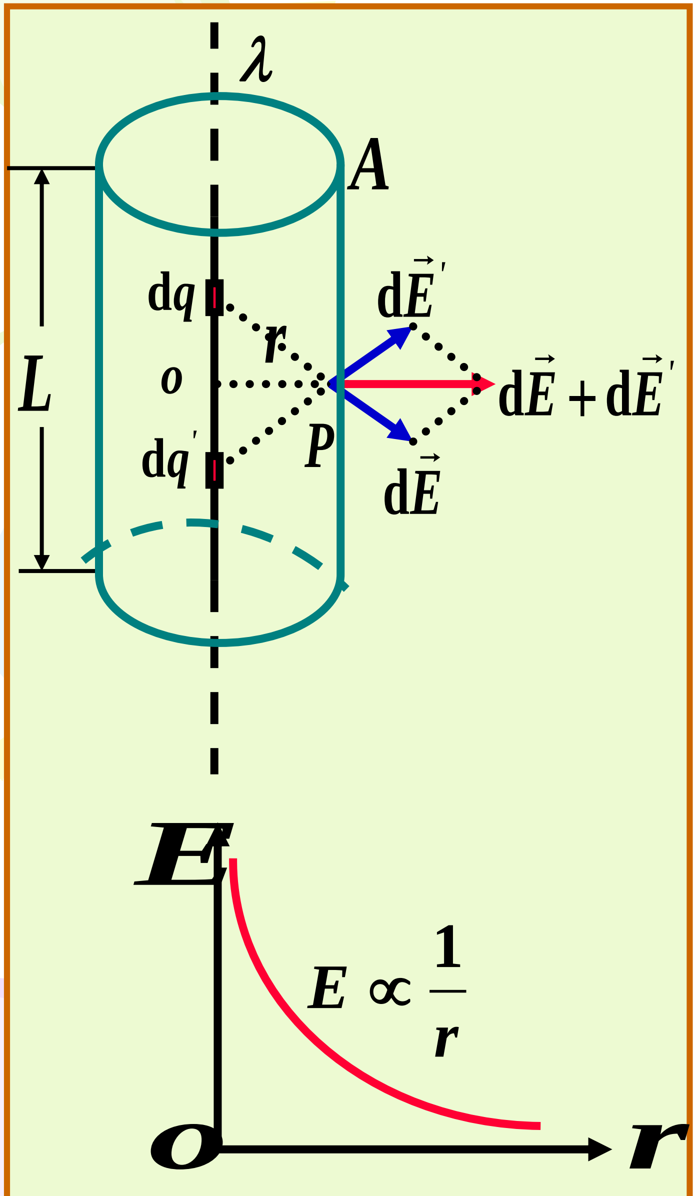
对称性分析：

P点处合场强 $\vec{E}$ 垂直于带电直线

与P地位等价的点的集合为以带电直线为轴的圆柱面。

选高斯面：

取长 L 的同轴圆柱面，加上底、下底构成高斯面 A



$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{上} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{下} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{上} E\cos\frac{\pi}{2}dA + \int_{下} E\cos\frac{\pi}{2}dA + \int_{侧} E\cos 0^\circ dA$$

$$= E\cdot 2\pi rL$$

由高斯定理：$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$$\Rightarrow \quad E\cdot 2\pi rL = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

方向与带电直线垂直。

讨论：

当带电直线不能视为无限长，或者电场分布不具有对称性时，能否用高斯定理求电场分布？

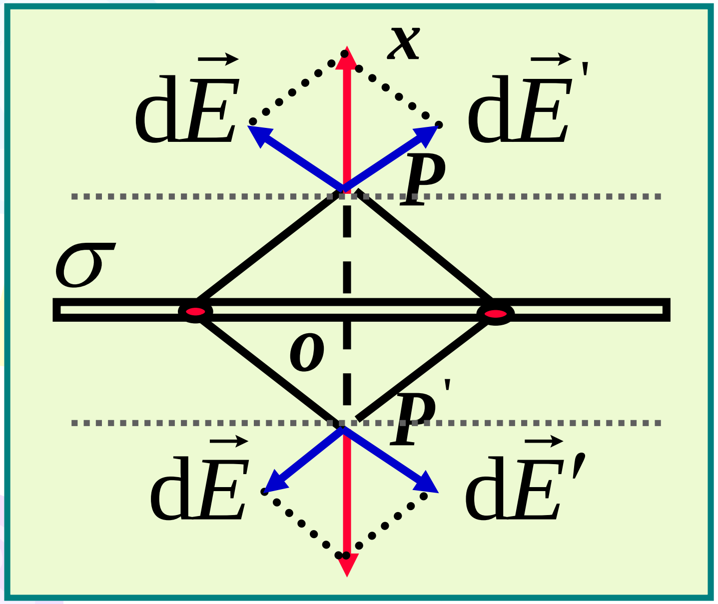
如果不能，是否意味着高斯定理失效？

$$\oint_A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_{\text{内}}$$

无论空间电荷如何分布，无论所选择的封闭曲面形状如何，高斯定理对电场总是成立的。

[例三] 无限大均匀带电平面的电场（电荷面密度 σ

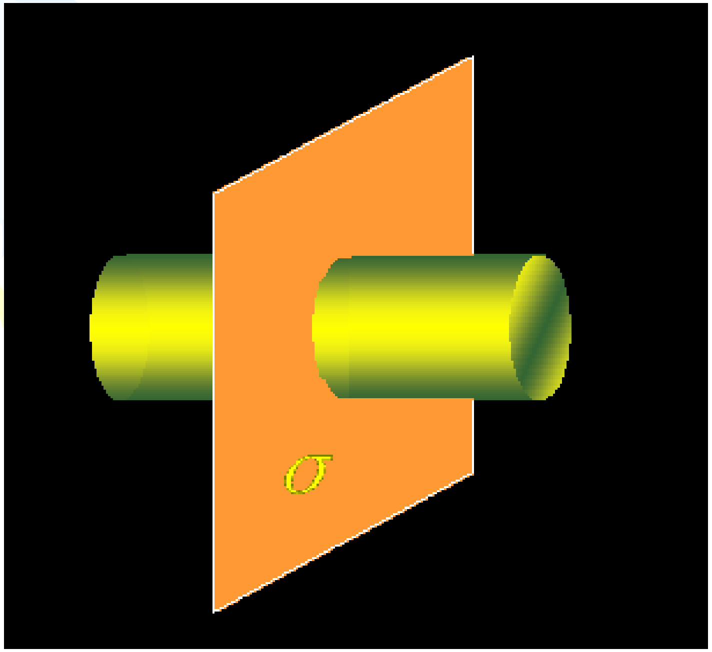
对称性分析：可视为无限长均匀带电直线的集合

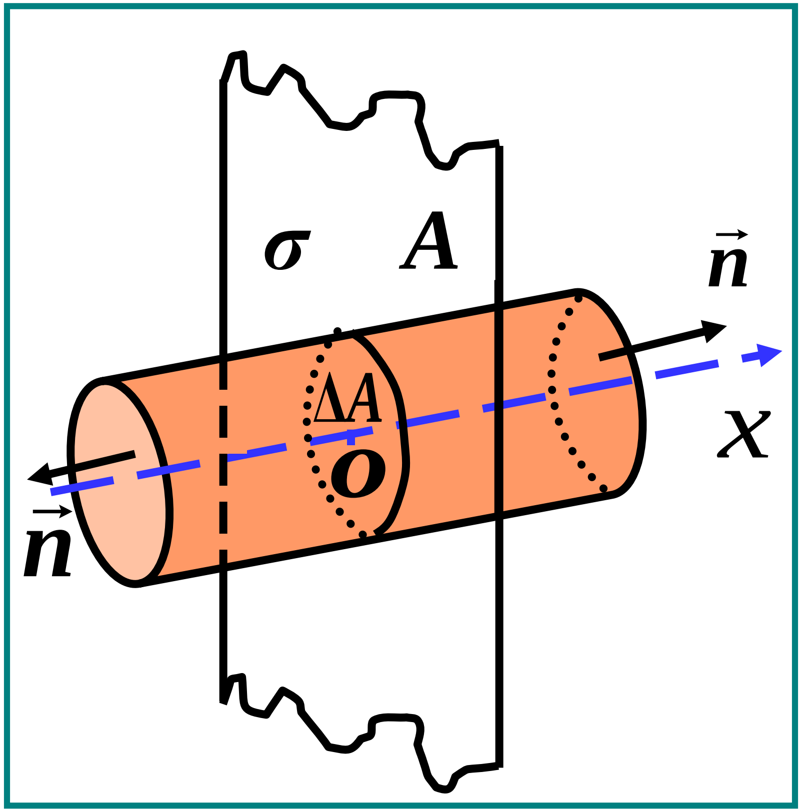


$\vec{E}$方向垂直于带电平面，离带电平面距离相等的场点彼此是等价的。

如何构成封闭的高斯面？

高斯面：
两底面与带电平面平行、离带电平面距离相等，轴线与带电平面垂直的柱面。





西南交通大学 Southwest Jiaotong University

$$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{左} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{右} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{侧} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$= \int_{左} E\cos 0^\circ \mathrm{d}A + \int_{右} E\cos 0^\circ \mathrm{d}A + \int_{侧} E\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{d}A \quad = 0$$

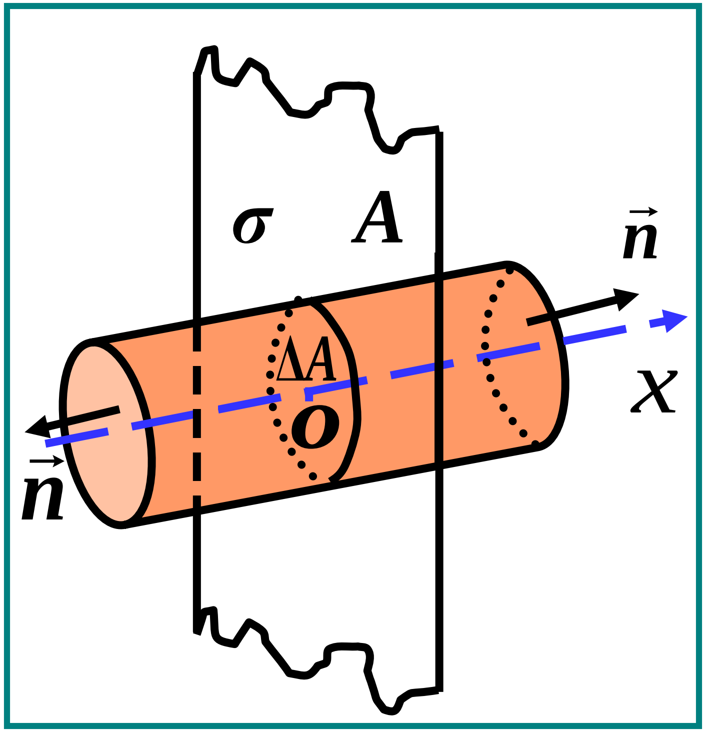
$$= E\cdot 2\Delta A$$

由高斯定理：$\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$

$$\Rightarrow \quad E\cdot 2\Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

其指向由σ的符号决定



掌握

总结： 由高斯定理求电场分布的步骤

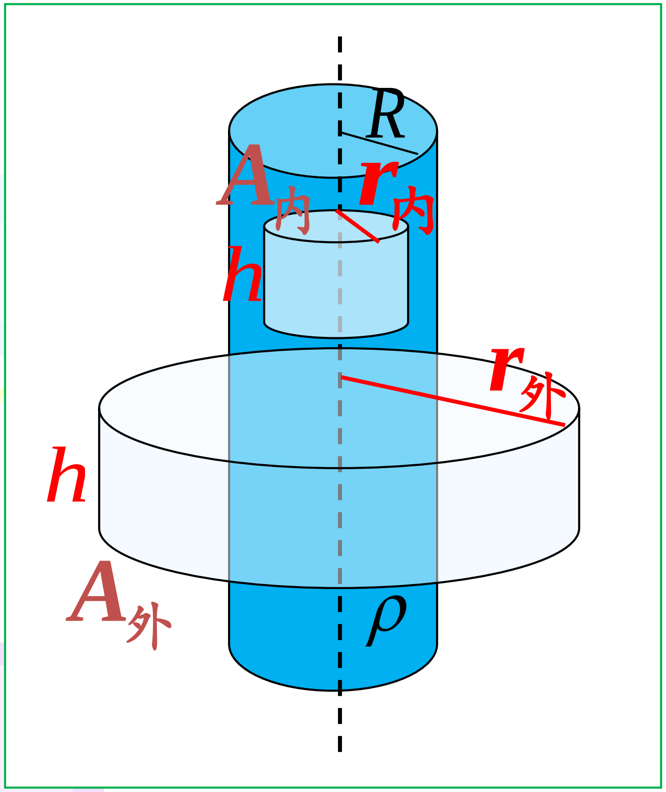
1. 由电荷分布的对称性分析电场分布的对称性

2. 在对称性分析的基础上选取高斯面，目的是使 $\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ 能够以乘积形式给出，把 E 提到积分号外

（球对称、轴对称、面对称三种类型）

3. 由高斯定理 $\oint_A \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$ 求出电场的大小，并说明其方向。

练习3. 求无限长均匀带电,电荷体密度为ρ，半径为R的圆柱体内外的电场分布。

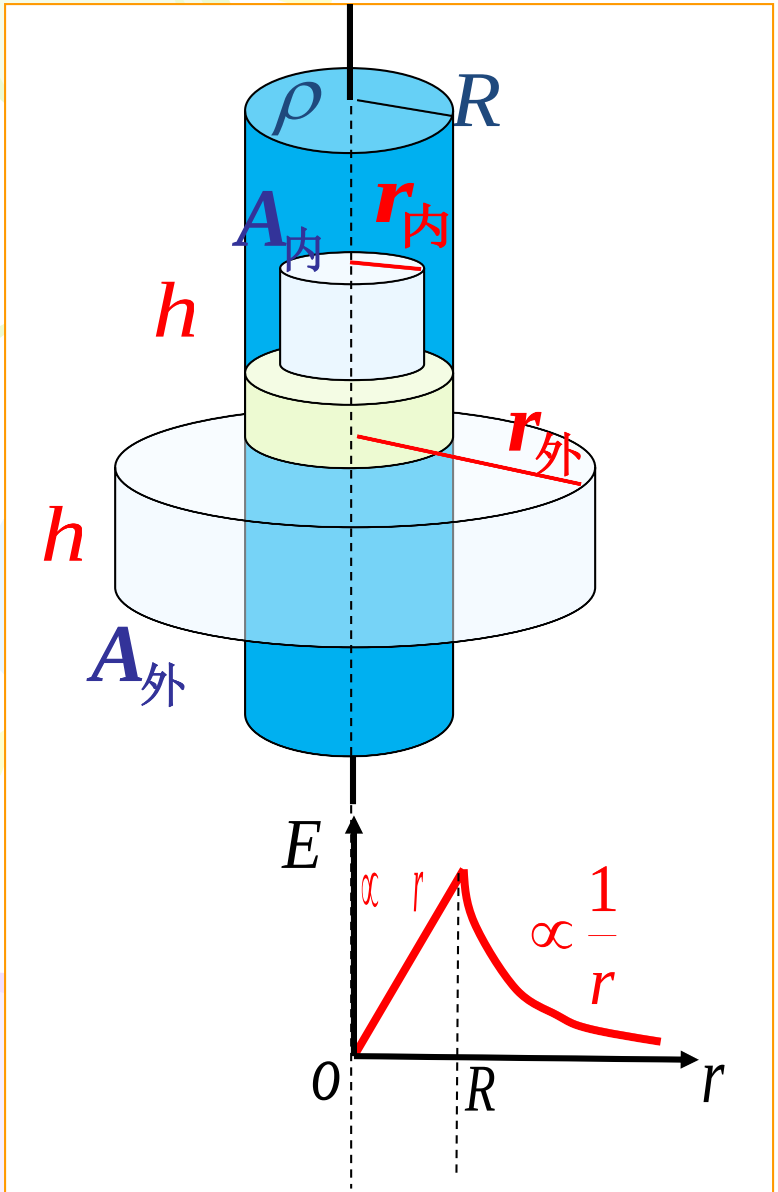


解： 对称性分析——柱面对称。

所以，选高h半径r的同轴圆柱面为高斯面。

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 2\pi r h = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

方向沿径向　$\sum q_{内} = ?$



$r \le R \qquad \sum q_{内} = \rho \cdot \pi r^2 h$

$r \ge R \qquad \sum q_{内} = \rho \cdot \pi R^2 h$

$$\vec{E}_{内} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$$\vec{E}_{外} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$$

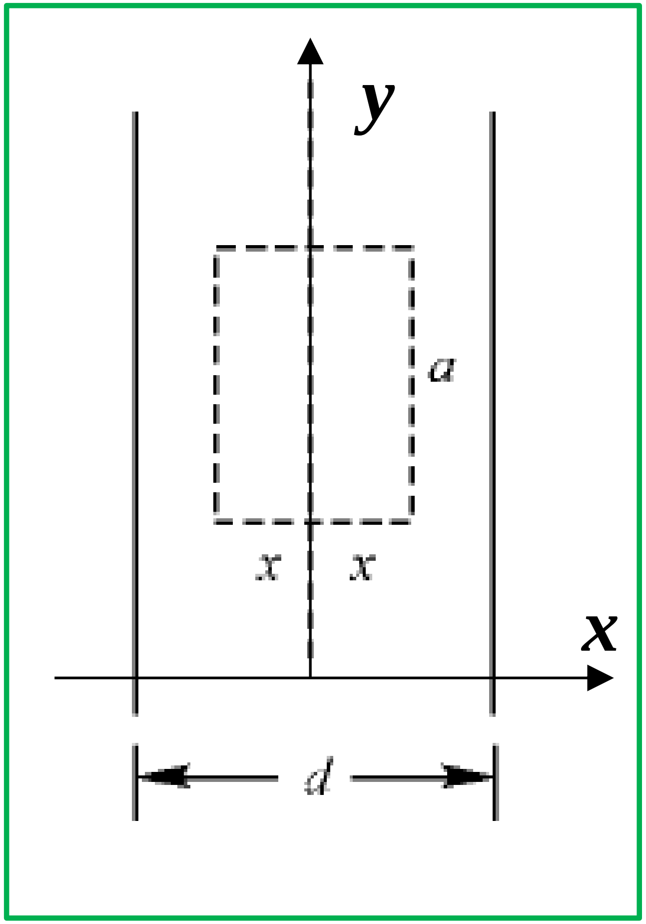
西南交通大学 Southwest Jiaotong University

练习4. 厚度为 d 的一块平板具有均匀体电荷密度 ρ 求：板内及板外空间中各点电场强度的大小。结果用离板的中央平面的距离 x 表示。

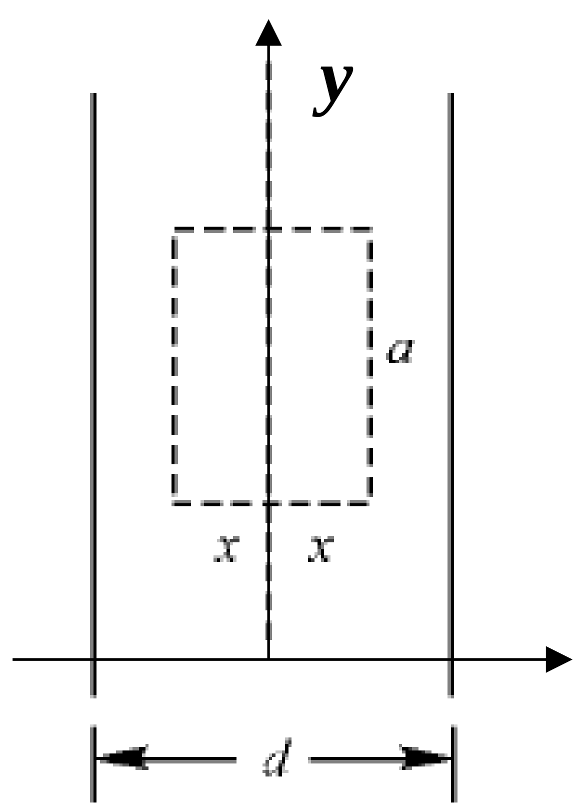
解： 对称性分析——**平面对称。**

直角坐标(x, y, z)， y和z方向电场强度不变。

本题中考虑ρ是均匀的，对x轴左右对称，故选“左右对称”的底边长为a,高为$2x$的桶。



$$\oint_A \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{左}\vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{右}\vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{侧}\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\cdot 2a^2$$



$$E = \frac{1}{2a^2\varepsilon_0}\sum q_{内}$$

板内:

$$\sum q = 2xa^2\rho \qquad \vec{E} = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

板外:

$$\sum q = da^2\rho \qquad \vec{E} = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\frac{x}{|x|}\vec{i}$$