



电气测量技术

朱英华

Email: zyh09@sina.com

西南交通大学电气工程学院

西南交通大学



4. B类标准不确定度的自由度

$$v_{\text{大}} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\left\{ \frac{\sigma[u(x)]}{u(x)} \right\}_{\text{小}}^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u(x)}{u(x)} \right]^{-2}$$

$u(x) - \sigma(x)$ 的经验估计值

$u(x)$ 的标准差

利用自由度可评价不确定度的可靠程度，自由度越大，不确定度越可靠。



以下几种情况评定出的B类标准不确定度，
可认为十分**可靠**，估计其自由度为**无限大**。

- 校准证书上给出的标准仪器测量结果的**扩展不确定度**。
- 按测量仪器的**最大允许误差或级别**评定出的不确定度。
- 按测量仪器的**等别**的不确定度档次界限评定出的不确定度。
- 按测量仪器的**引用误差**评定出的不确定度。



2.4.3 输入量的标准不确定度的评定

输入量 x_i 的标准不确定度：
分量个数

$$u(x_i) = \sqrt{\sum_{k=1}^m [u_k(x_i)]^2}$$

输入量 x_i 标准不确定度的自由度：

$$v_i = \frac{u^4(x_i)}{\sum_{k=1}^m \frac{u_k^4(x_i)}{v_{ik}}}$$



输入量标准不确定度评定举例

[例2-4] 某数字电压表的技术说明书说明：该表校准后1-2年内，在1V量程内示值最大允许误差的模为 $14 \times 10^{-6} \times \text{读数} + 2 \times 10^{-6} \times \text{量程}$ 。该表校准后的第18个月，采用该表的1V量程测量电压 U ，在重复性条件下进行了10次测量，测得电压 U 的平均值为0.998 571V，平均值的实验标准差为 $3\mu\text{V}$ ，试分析测量结果的标准不确定度及其自由度。



解：以电压算术平均值 \bar{U} 为测量结果，即：

$$y = \bar{U} = 0.998\ 571\text{V}$$

标准不确定度的来源：

- ① 重复测量中随机因素影响引入的标准不确定度分量 u_1
- ② 数字电压表不准确(最大允许误差)引入的标准不确定度分量 u_2



标准不确定度分量 u_1 采用A类评定，即：

$$u_1(\bar{U}) = s(\bar{U}) = 3 \mu V$$

标准不确定度分量 u_1 的自由度为：

$$\nu_1 = n - 1 = 10 - 1 = 9$$



标准不确定度分量 u_2 采用B类评定。

电压表最大允许误差的模（最大误差限）为：

$$\begin{aligned}A &= 14 \times 10^{-6} \times \text{读数} + 2 \times 10^{-6} \times \text{量程} \\ &= 14 \times 10^{-6} \times 0.998\ 571 + 2 \times 10^{-6} \times 1 \\ &= 16\ \mu\text{V}\end{aligned}$$



由电压表最大允许误差引起的 标准不确定度分量 u_2 为:

$$u_2(\bar{U}) = \frac{A}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}} = 9.3 \mu V$$

考虑到 $u_2(\bar{U})$ 是根据最大允许误差评定得出，非常可靠，所以B类标准不确定度的自由度为:

$$\nu_2 \rightarrow \infty$$



电压测量结果的标准不确定度 u 为：

$$u(\bar{U}) = \sqrt{[u_1(\bar{U})]^2 + [u_2(\bar{U})]^2} = \sqrt{3^2 + 9.3^2} = 9.8 \mu V$$

标准不确定度的自由度为：

$$\nu = \frac{[u(\bar{U})]^4}{\frac{[u_1(\bar{U})]^4}{\nu_1} + \frac{[u_2(\bar{U})]^4}{\nu_2}} = \frac{9.8^4}{\frac{3^4}{9} + \frac{9.3^4}{\infty}} = 1024.9$$



2.5 合成标准不确定度的评定

- 评定方法
- 有效自由度
- 合成标准不确定度评定举例



2.5.1 评定方法

1. 合成标准不确定度的评定

(1) 全部输入量彼此独立或不相关

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

合成标准不确定度:

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$u_i(y) = |c_i| u(x_i)$$

合成标准不确定度分量

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [u_i(y)]^2}$$

灵敏系数



2.5.1 评定方法

1. 合成标准不确定度的评定

(1) 全部输入量彼此独立或不相关

合成标准不确定度:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N [u_i(y)]^2}$$

这种情况下，被测量测量结果的合成标准不确定度为其分量 $u_i(y)$ 的平方和根。



(2) 输入量彼此相关

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

合成标准不确定度:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j u(x_i, x_j)}$$

x_i, x_j 的协方差

相关系数

$$\text{由于 } u(x_i, x_j) = u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j)$$



得

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j)}$$

- 特别地，若所有的 x_i 完全正相关

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^N c_i u(x_i) \right]^2} = \sum_{i=1}^N c_i u(x_i)$$



注意

- 灵敏系数的计算
- 相关性是指输入量在进行测量时，是否存在相关性



2. 相对合成标准不确定度的评定

$$u_c(y) \rightarrow u_{\text{crel}}(y)$$

$$u_{\text{crel}}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$$



2.5.2 有效自由度 (ν_{eff})

合成标准不确定度的自由度称为有效自由度。

有效自由度用于评定合成标准不确定度的可靠程度,有效自由度越大,则合成标准不确定度的可靠程度越高。



若被测量之值接近正态分布, 且各输入量彼此间相互独立时, 则被测量的合成标准不确定度 $u_c(y)$ 的有效自由度 ν_{eff} 为:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{[u_i(y)]^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{[c_i u(x_i)]^4}{\nu_i}}$$

welch---Satterthwaite 公式



若 V_{eff} 带小数, 通常采用**截尾法**或**内插法**得到**邻近的**, 数值较**低**的整数。

V_{eff}

8.59

$V_{\text{eff}} = 8$



2.5.3 合成标准不确定度评定举例

[例2-5]被测量电压的已修正测量结果为 $U = \bar{U} + \Delta\bar{U}$ ，其中重复测量的算术平均值 $\bar{U} = 0.928\ 571\ \text{V}$ ，其标准不确定度为 $u(\bar{U}) = 12\ \mu\text{V}$ 。修正值为 $\Delta\bar{U} = 0.000\ 127\ \text{V}$ ，修正值的标准不确定度由B类评定得到， $u(\Delta\bar{U}) = 3\ \mu\text{V}$ 。求测量结果 U 的合成标准不确定度。



解： 根据数学模型，得电压测量结果为：

$$\begin{aligned}U &= \bar{U} + \Delta\bar{U} \\ &= 0.928\ 571 + 0.000\ 127 \\ &= 0.928\ 698\ \text{V}\end{aligned}$$



输入量 \bar{U} 的灵敏系数及标准不确定度为：

$$c_1 = \frac{\partial U}{\partial \bar{U}} = 1, \quad u(\bar{U}) = 12 \mu\text{V}$$

输入量 $\Delta \bar{U}$ 的灵敏系数及标准不确定度为：

$$c_2 = \frac{\partial U}{\partial \Delta \bar{U}} = 1, \quad u(\Delta \bar{U}) = 3 \mu\text{V}$$



考虑 \bar{U} 和 $\Delta\bar{U}$ 不相关，则测量结果 U 的合成标准不确定度为：

$$\begin{aligned}u_c(U) &= \sqrt{[c_1 u(\bar{U})]^2 + [c_2 u(\Delta\bar{U})]^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 3^2} = 12 \mu\text{V}\end{aligned}$$



测量结果 U 的相对合成标准不确定度为：

$$\begin{aligned}u_{\text{crel}}(U) &= \frac{u_c(U)}{U} \\ &= \frac{12 \times 10^{-6}}{0.928\ 698} = 0.001\ 3\%\end{aligned}$$